Тогда

$$\tilde{c} = (E_1N_1 ; A_0A_1) = (E_2N_2 ; A_0A_2),$$

$$b = (PE_3 ; A_3A_0) = -(PE_3^* ; A_3A_0),$$

$$b_i^j = (PE_3 ; A_3A_0)(S_iE_0^* ; A_1A_2) = (PE_3^* ; A_3A_0)(S_iE_0 ; A_1A_2),$$

$$b_i^j = b_j^i (\mathcal{F}_iE_0 ; A_1A_2)^2,$$

$$m = (b-1)(A_0A_1 ; E_1T_1) - \tilde{c}(b + b_1^2) =$$

$$= (b-1)(A_0A_2 ; E_2T_2) - \tilde{c}(b + b_2^1),$$

$$\lambda = -m + (RE_3 ; A_3A_0)(1 + (E_1N_1 ; A_0A_1)) =$$

$$= -m + (RE_3 ; A_3A_0)(1 + (E_2N_2 ; A_0A_2)).$$

Библиографический список

1. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1981. Вып.12. С.44–47.

2. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции квадрик с вырождающейся поверхностью, порожденной фокальными точками второго порядка// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т. Калининград, 1985. Вып.16. С.113–116.

3. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с четырехкратной фокальной поверхностью// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1986. Вып.17. С.106–109.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

О КОНГРУЭНЦИЯХ ПАР ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КОНИК

Е.А. Щ е р б а к
(Калининградский университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются конгруэнции пар коник F_1, F_2 с совпадающими центрами. Отнесем конгруэнцию к подвижному реперу $R = \{A, \bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha = 1,2,3$), начало A которого совмещено с центром коники F_1, векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ сопряжены относительно коники F_1, а векторы $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ – относительно коники F_2, концы E_α векторов $\bar{e}_\alpha$ расположены на соответствующих кониках. Обозначим через $\bar{E}'_\alpha = \bar{A} - \bar{e}_\alpha$.

Уравнения коник F_1 и F_2 относительно выбранного репера R имеют соответственно вид:

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \\ x^3 = 0, \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \\ x^1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Будем называть конгруэнцией T указанную конгруэнцию коник F_1, F_2 при условии, что коники F_1 конгруэнции (F_1) принадлежат инвариантной квадрике Q, центр которой совпадает с центром A коник, и прямая (AE_3) сопряжена плоскости $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$ относительно квадрики Q.

Уравнение квадрики Q имеет вид:

$$Q \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + a(x^3)^2 - 1 = 0, \quad a \neq 0 \qquad (3)$$

В силу инвариантности квадрики Q имеем

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2,$$
$$\omega_3^1 = -a\omega_1^3, \quad \omega_3^2 = -a\omega_2^3, \quad da = 2a\omega_3^3 \qquad (4)$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции T состоит из уравнений (4) и следующих уравнений:

$$\omega_1^2 = \Gamma_{1i}^2 \Omega^i, \quad \omega_3^3 = \Gamma_{3i}^3 \Omega^i, \qquad (5)$$

где $\omega_3^i = \Omega^i, \quad \Omega^1 \wedge \Omega^2 \neq 0.$

Конгруэнции T существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов. Известно, что фокальные точки коники F_1 конгруэнции T неопределены [1], т.к. коники F_1 принадлежат инвариантной квадрике. Координаты фокальных точек коники F_2 конгруэнции (F_2) находятся из уравнений (2) и уравнения

$$x^2(x^3)^2\left(\Gamma^2_{11}\Gamma^3_{32}-\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{31}-\frac{1}{a}-1\right)+(x^2)^2x^3\Gamma^2_{11}\left(1+\frac{1}{a}\right)-(x^3)^3\Gamma^3_{32}=0. \qquad (6)$$

Очевидно, что точки E_2 и E_2' являются фокальными точками коники F_2, поэтому уравнение (6) перепишем в виде

$$x^2x^3\left(\Gamma^2_{11}\Gamma^3_{32}-\Gamma^2_{12}\Gamma^3_{31}-\frac{1}{a}-1\right)+(x^2)^2\Gamma^2_{11}\left(1+\frac{1}{a}\right)-(x^3)^2\Gamma^3_{32}=0. \qquad (7)$$

Т е о р е м а 1. Точки E_2, E_2' тогда и только тогда являются сдвоенными фокальными точками коники F_2 конгруэнции (F_2), когда на поверхности (E_2) касательная вдоль координатной линии $\Omega^2=0$ параллельна вектору $\bar{e}_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$d\bar{E}_2=(-\Gamma^2_{11}\bar{e}_1+\Gamma^3_{21}\bar{e}_3)\Omega^1+(-\Gamma^2_{12}\bar{e}_1+\Gamma^3_{22}\bar{e}_3)\Omega^2. \qquad (8)$$

На поверхности (E_2) касательная вдоль координатной линии $\Omega^2=0$ тогда и только тогда параллельна вектору $\bar{e}_3$, когда

$$\Gamma^2_{11}=0 \qquad (9)$$

Из уравнения (7) следует, что точки E_2, E_2' тогда и только тогда являются сдвоенными фокальными точками коники F_2, когда

$$\Gamma^2_{11}=0. \qquad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2. Точки E_3 и E_3' тогда и только тогда являются фокальными точками коники F_2 конгруэнции (F_2), когда на поверхности (E_3) касательная вдоль координатной линии $\Omega^1=0$ параллельна вектору $\bar{e}_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$d\bar{E}_3=\Omega^1(\bar{e}_1+\Gamma^3_{31}\bar{e}_3)+\Omega^2(\bar{e}_2+\Gamma^3_{32}\bar{e}_3).$$

На поверхности (E_3) касательная вдоль линии $\Omega^1=0$ тогда и только тогда параллельна вектору $\bar{e}_2$, когда $\Gamma^3_{32}=0$. Из (7) следует, что точки E_3 и E_3' тогда и только тогда являются фокальными точками коники F_2, когда $\Gamma^3_{32}=0$. Сравнивая полученные условия, убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 3. Точка E_3 тогда и только тогда является фокусом луча $(E_3,\bar{e}_1)$ конгруэнции $\{E_3,\bar{e}_1\}$, когда на поверхности (E_3) касательная вдоль координатной линии $\Omega^2=0$ параллельна вектору $\bar{e}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координаты фокусов $\bar{F}=\bar{A}+\bar{e}_3+\lambda\bar{e}_1$ луча $(E_3,\bar{e}_1)$ конгруэнции находятся из уравнения

$$\frac{1}{a}\lambda^2\Gamma^2_{12}+\lambda\left(\Gamma^2_{11}\Gamma^3_{32}+\frac{1}{a}-\Gamma^3_{31}\Gamma^2_{12}\right)-\Gamma^3_{31}=0.$$

Если точка E_3 является фокусом луча $(E_3,\bar{e}_1)$ конгруэнции $\{E_3,\bar{e}_1\}$, то

$$\Gamma^3_{31}=0, \qquad (11)$$

и наоборот. Рассмотрим $d\bar{E}_3=\Omega^1(\bar{e}_1+\Gamma^3_{31}\bar{e}_3)+\Omega^2(\bar{e}_2+\Gamma^3_{32}\bar{e}_3)$

Если $(d\bar{E}_3)_{\Omega^2=0}$ параллелен вектору $\bar{e}_1$, то

$$\Gamma^3_{31}=0, \qquad (12)$$

и наоборот, из (11) и (12) следует утверждение теоремы.

Т е о р е м а 4. Точка E_i тогда и только тогда является сдвоенным фокусом луча $(E_i,\bar{e}_3)$ конгруэнции $\{E_i,\bar{e}_3\}$, когда поверхность (E_i) вырождается в линию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Координаты фокусов $\bar{F}=\bar{A}+\bar{e}_i+\lambda\bar{e}_3$ луча $(E_i,\bar{e}_3)$ конгруэнции $\{E_i,\bar{e}_3\}$ находятся из уравнения $\lambda(\lambda+\Gamma^2_{1j})=0, \quad (i\neq j)$. Таким образом, если E_i – сдвоенный фокус луча $(E_i,\bar{e}_3)$, то $\Gamma^2_{1j}=0$, и наоборот.

Это же условие получаем, если требуем, чтобы поверхность (E_i) вырождалась в линию.

Т е о р е м а 5. Конгруэнция T обладает также следующими свойствами: 1) на поверхности (E_i) касательная вдоль координатной линии $\Omega^i=0$ параллельна вектору $\bar{e}_j$, вдоль $\Omega^j=0$ параллельна плоскости $(\bar{e}_i,\bar{e}_3)$, $(i\neq j)$; 2) конгруэнции прямых $(A,\bar{e}_3)$ и плоскостей $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$ аффинно расслояемы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Имеем

$$d\bar{E}_1=\Omega^1\left(\Gamma^2_{11}\bar{e}_1-\frac{1}{a}\bar{e}_3\right)+\Omega^2\Gamma^2_{12}\bar{e}_2,$$

$$d\bar{E}_2 = -\Gamma^2_{11}\bar{e}_1\Omega^1 - (\Gamma^2_{12}\bar{e}_1 + \frac{1}{a}\bar{e}_3)\Omega^2. \qquad (13)$$

Рассматривая $d\bar{E}_1$ и $d\bar{E}_2$ вдоль линий $\Omega^1 = 0$ и $\Omega^2 = 0$, убеждаемся в справедливости утверждения.

2) Условия аффинного расслоения от конгруэнции прямых $(A, \bar{e}_3)$ к конгруэнции плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ имеют вид:

$$\omega^1_3 \wedge \omega^3_1 + \omega^2_3 \wedge \omega^3_2 = 0, \quad \omega^1 \wedge \omega^3_1 + \omega^2 \wedge \omega^3_2 = 0. \qquad (14)$$

С учетом уравнений системы (4), уравнения (14) обращаются в тождества, что и доказывает теорему.

Рассмотрим конгруэнцию цилиндров Φ_1, направляющими которых являются коники F_2, а образующие параллельны вектору $\bar{e}_1$. Уравнение цилиндра Φ_2 записывается в виде $\Phi_1 \equiv (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0$.

Т е о р е м а 6. Прямые $(E_2, \bar{e}_1)$ и $(E'_2, \bar{e}_1)$ пересечения цилиндра Φ_1 с плоскостью $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ тогда и только тогда принадлежат фокальному многообразию цилиндра Φ_1 конгруэнции (Φ_1), когда поверхность (E_2) вырождается в линию с касательной, параллельной вектору $\bar{e}_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальное многообразие цилиндра Φ_1 конгруэнции (Φ_1) задается системой уравнений:

$$(x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \quad \Gamma^2_{11}x^1x^2 + \frac{1}{a}x^1x^3 - \Gamma^3_{31}(x^3)^2 = 0,$$

$$\Gamma^2_{12}x^1x^2 + (\frac{1}{a} - 1)x^2x^3 - \Gamma^3_{32}(x^3)^2 = 0. \qquad (15)$$

Указанные в условии прямые тогда и только тогда принадлежат фокальному многообразию (15), когда

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = 0. \qquad (16)$$

Из (13) следует, что поверхность (E_1) тогда и только тогда вырождается в линию с касательной, параллельной вектору $\bar{e}_3$, когда

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = 0. \qquad (17)$$

Сравнивая (16) и (17), убеждаемся в справедливости теоремы.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып.7.

С е м и н а р
по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках сборника освещена работа семинара до 25 декабря 1985г.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных на семинаре в 1986 году.

5.02.86. И.С. Г р и г о р ь е в а (г.Казань). Обобщенно-голоморфные функции над алгебрами и их геометрические приложения.

12.02.86. Е.Н. С о с о в (г.Казань). Некоторые вопросы релятивной линейчатой геометрии проективного пространства.

19.02.86. Е.П. С о п и н а. Конгруэнции эллипсоидов в аффинном пространстве с вырождающейся фокальной поверхностью.

26.02.86. В.С. М а л а х о в с к и й. Об одном классе дифференциально-геометрических структур, порожденных полем гиперквадрик.

5.03.86. Е.В. С к р ы д л о в а. Вырожденные конгруэнции, порожденные плоскостью и прямой.

12.03.86. Е.А. М и т р о ф а н о в а. Многообразия параболоидов и аффинно-нормализованные структуры.

19.03.86. Ю.И. П о п о в. Дифференциально-геометрические структуры трехсоставного распределения в многомерном проективном пространстве.

26.03.86. Ю.И. Ш е в ч е н к о. Связности в расслоениях, ассоциированных с пространством квадрик.

2.04.86. Б.А. А н д р е е в. Многообразия квадрик, метод форм и ряды теории возмущений.

9.04.86. В.В. М а х о р к и н. Фокальные точки второго порядка.

16.04.86. Л.А. Ж а р и к о в а. Конгруэнции нецентральных квадратичных элементов и приложение к ним теории связностей.

23.04.86. В.А. Т р у п п о в а. (г.Иркутск). Многообразия касательных элементов и вопросы геометрии систем обыкновен-